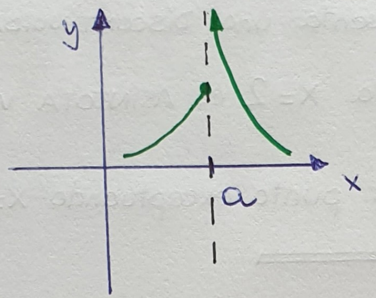
30-ABRIL-2020

3. DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO

Diremos que una función $y=f(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO en $x=a$, si al menos uno de los límites laterales es igual a $\pm\infty$.

Gráficamente, la función tendrá una ASÍNTOTA VERTICAL en $x=a$

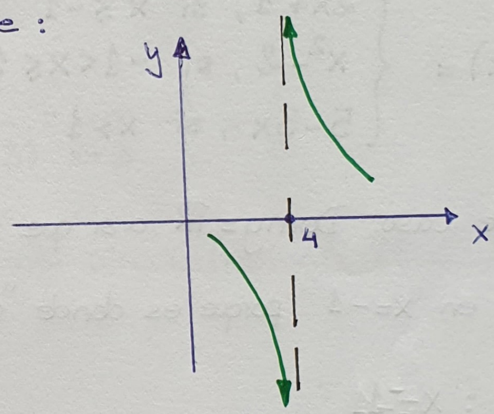


Por ejemplo, la función $y=f(x)=\dfrac{3}{x-4}$ presenta una DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO en $x=4$, porque:

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{3}{x-4} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 4^-} \frac{3}{x-4} = -\infty$$

La gráfica de la función "cerca" de $x=4$ hará algo parecido al dibujo...

(La recta $x=4$ es una ASÍNTOTA VERTICAL)



Ejemplo 1 Estudiar la continuidad de la función $y=f(x)=\dfrac{3x}{x^2-2x}$ y clasificar sus discontinuidades.

Lo primero que hacemos es calcular el DOMINIO... En este caso, $\text{Dom}\,y=\mathbb{R}-\{0,2\}$

Por tanto, la función NO ES CONTINUA en $x=0$ ni en $x=2$.

Vamos a estudiar qué tipo de discontinuidades presenta...

CASO 1 : $x=0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2-2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x-2} = -\frac{3}{2}$$

Por tanto, en $x=0$ la función presenta una DISCONTINUIDAD EVITABLE

CASO ② : $x=2$

$$\underbrace{\lim_{x\to 2} f(x)}_{\nexists} = \lim_{x\to 2} \frac{3x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 2} \frac{3}{x-2} = \frac{3}{0} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{+}{+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{+}{-} = -\infty \end{cases}$$

CONCLUSIÓN : En $x=2$ la función presenta una DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO INFINITO. Además, la recta $x=2$ es ASÍNTOTA VERTICAL.

La función es CONTINUA en cualquier punto exceptuando $x=0$ y $x=2$

Ejemplo ② : Estudiar la continuidad de la función $y=f(x)$ y clasificar sus discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-2, & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 5-3x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

En este caso, $Dom\,y = \mathbb{R}$, así que analizaremos en detalle lo que ocurre en $x=1$ y en $x=-1$ porque es donde "cambia" la expresión analítica...

CASO ① : $x=-1$

$$f(-1) = 2\cdot(-1)+1 = -1$$

$$\underbrace{\lim_{x\to -1} f(x)}_{= -1} \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} (2x+1) = -1 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN : En $x=-1$, la función es CONTINUA

CASO ② : $x=1$

$$f(1) = 1^2-2 = -1$$

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} f(x)}_{\nexists} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} (5-3x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2-2) = -1 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN : En $x=1$ la función presenta una DISCONTINUIDAD INEVITABLE DE SALTO FINITO.

Ejemplo 3 : Estudiar la continuidad de la función $y = f(x)$ y clasificar sus discontinuidades.

$$f(x) = \begin{cases} 5x+3, & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x-3}{x^2-3x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Observad que $\text{Dom}\, y = \mathbb{R} - \{3\}$

Por tanto, estudiaremos dos casos : $x = 0$ y $x = 3$

(La función es CONTINUA $\forall x$, salvo, quizás en estos dos casos...)

CASO 1 $f(0) = 5 \cdot 0 + 3 = 3$

$$\underbrace{\lim_{x \to 0} f(x)}_{\nexists} \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-3}{x^2-3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} (5x+3) = 3 \end{cases}$$

CONCLUSIÓN: En $x = 0$ la función presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito.

CASO 2 : $x = 3$

$f(3) \to \nexists$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-3x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)}{x \cdot (x-3)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

CONCLUSIÓN : La función $y = f(x)$ presenta una DISCONTINUIDAD EVITABLE en $x = 3$.

TAREAS

- Copiad estas páginas en vuestro cuaderno.
- Estudiar la continuidad y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones :

a) $y = f(x) = \dfrac{5x-5}{x^2-1}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{si } x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ \dfrac{2x-3}{x}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$