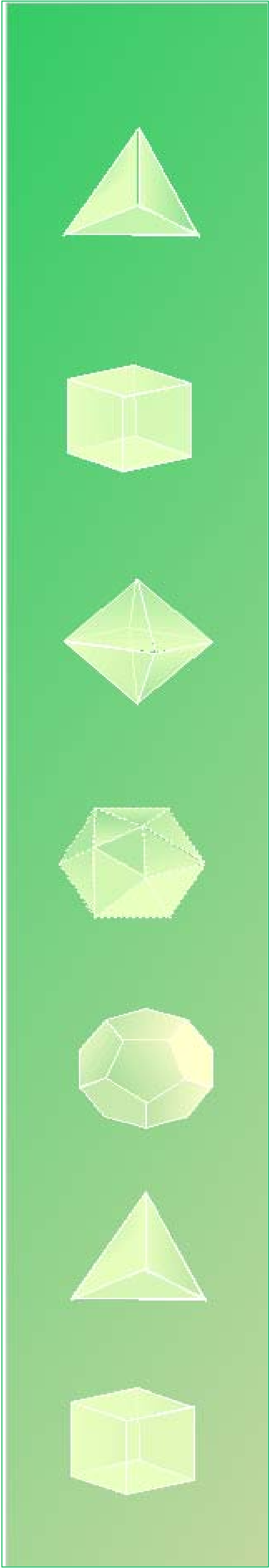


MATEMÁTICAS I
1º Bachillerato
Capítulo 7: Límites y continuidad

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Ángel Morales García

Revisora: Raquel Hernández

Ilustraciones: Elaboración propia

Índice

Resumen

El concepto de límite es necesario para comprender todo el Análisis. En él se van a basar los conceptos que vamos a estudiar a continuación como continuidad y derivada de una función o como el concepto de integral.

Nos ayudará a mejorar el estudio de la gráfica de una función determinando sus asíntotas y sus ramas infinitas.

Ya sabes que la recta real puede ampliarse añadiendo el $-\infty$ y el $+\infty$. Estudiaremos el comportamiento de las funciones cuando x tiende a $+\infty$ y cuando tiende a $-\infty$, es decir, cuando la variable independiente toma valores muy grandes, o muy pequeños (muy grandes en valor absoluto), y estudiaremos aquellos casos en los que la variable dependiente tiende a infinito.

Con el concepto de infinito debemos tener cuidado pues propiedades que "siempre" se verificaban, ahora dejarán de cumplirse.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

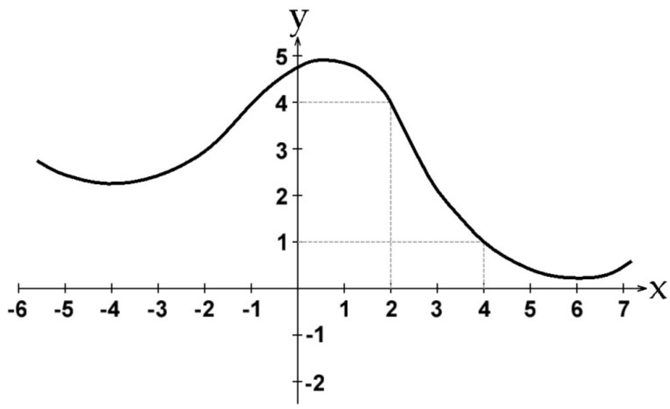
1. CONCEPTO DE LÍMITE

¿Qué es un límite?

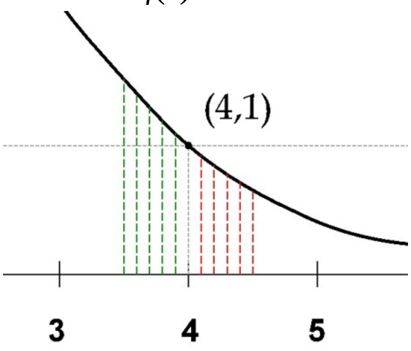
Límite: lo podemos definir como aquel lugar al que, si no llegamos, seremos capaces de acercarnos todo lo que queramos.

En sentido matemático, el límite de una función en un punto, tiene sentido de "***lugar***" hacia el que se dirige el valor de la función $f(x)$ cuando la variable independiente (x) se aproxima a un valor determinado.

Si tomamos la función del gráfico adjunto, cuando (x) se aproxima al valor **4**, el valor de la función ($f(x)$) se aproxima al valor **1**. Además, en este caso, no solo podremos acercarnos todo cuanto queramos, sino que llegamos a ese valor, puesto que el valor de la función para x = **4** es $f(x)$ = **1**.



Ampliando la gráfica de la función, en el entorno del punto (**4**, **1**), hemos dibujado los valores de $f(x)$ en el entorno de x = **4** y, como primera observación, vemos que nos podemos acercar al valor de x = **4** desde valores mayores a **4** (rojo) o menores a él (verde). En el primer caso diremos que nos aproximamos al valor de x = **4** por la **derecha** y, en el segundo caso, por la **izquierda**.



En ambos casos, podemos ver que el valor de $f(x)$ se aproxima a **1**, tanto como queramos, por la derecha desde valores menores a **1** (rojo), pero también lo podremos hacer, desde la izquierda, desde valores mayores a **1** (verde).

Por lo tanto, podemos intuir que, el límite de la función $f(x)$ es **1**, cuando el valor de la variable independiente x se acerca a **4** y se expresa de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 1$$

Actividades resueltas

- *Estima el valor de* $\lim_{x\to 2}(x^2 - 3)$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto x = 2.

x	3	2'5	2'1	2'05	2'04	2'03	2'02	2'01	2'001	2'0001
$f(x)$	6	3'25	1'41	1'2025	1'1616	1'1209	1'0804	1'0401	1'004001	1'00040001

x	1	1'5	1'7	1'9	1'95	1'97	1'98	1'99	1'999	1'9999
$f(x)$	–2	–0'75	–0'11	0'61	0'8095	0'8809	0'9204	0'9601	0'996001	0'99960001

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Observa cómo, al aproximarnos los valores de la variable a 2, siendo mayor que 2: 3, 2'5, 2'1, … los valores de la función se aproximan a 1: 6, 3'25, 1,41, 1'2025, … 1'0401, 1'004001, 1'00040001 siendo siempre mayores que 1, mientras que al aproximarnos a 2, siendo menores que 2: 1, 1'5, … 1'99, 1'999, 1'9999 los valores de la función también se aproximan a 1, tanto como queramos, siendo ahora menores que 1: –2, –0,11, 0'61, …, 0'996001, 0'99960001.

Pretendemos escribir con rigor matemático la idea de "*aproximarse*" y "*estar cerca*", "*tanto como queramos*".

1.1. Definición

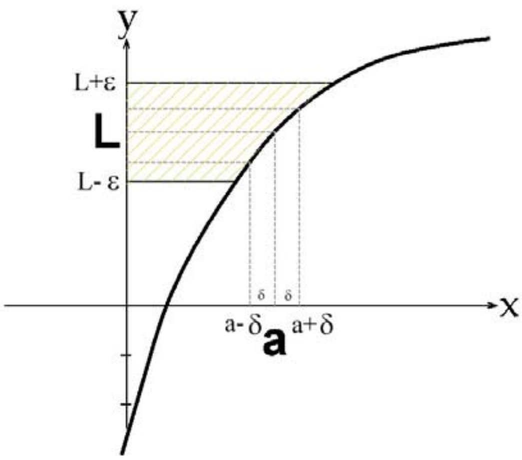
Se define, matemáticamente, el límite de una función, según la expresión:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando se aproxima a a es L, y se expresa:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

Cuando:

Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Del gráfico anterior, se desprende que, cualquier punto x que pertenezca al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, salvo quizás el propio punto a (por ese motivo aparece en la definición es signo <, $0 < |x - a|$, para eliminar del entorno al punto a), su imagen siempre estará contenida en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Y como lo podemos hacer para cualquier ε, entonces, podremos afirmar que L es el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a.

Actividades resueltas

- *Utiliza la definición de límite para comprobar que* $\lim_{x\to 2}(x^2) = 4$

La definición dice: para todo ε, por lo que elegimos un ε cualquiera, e imponemos:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \to |(x^2) - 4| < \varepsilon \to |x^2 - 4| = |(x - 2)(x + 2)| < |x - 2|^2 < \varepsilon \to |x - 2| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Basta tomar $0 < \delta < \sqrt{\varepsilon}$ para que se verifique si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|(x^2) - 4| < \varepsilon$.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades propuestas

1. Utiliza la definición de límite para probar que $\lim\limits_{x \to +1} x = 1$.

Propiedades

Si existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, es único.

Si hubiera dos límites distintos bastaría tomar como ε un tercio de la distancia entre ambos límites para llegar a contradicción.

Como vimos antes, podemos acercarnos a a por la derecha o por la izquierda y, de ahí, obtenemos los **límites laterales**.

1.2. Límites laterales

Límite lateral por la derecha

El **límite lateral**, por la **derecha** de un punto, de la función $f(x)$, se expresa como:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x > a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < x - a < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límite lateral por la izquierda.

El **límite lateral**, por la **izquierda** de un punto, de la función $f(x)$, se expresa como:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se define como el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x < a$. Es decir, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < a - x < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Actividades resueltas

- *Estima el valor del límite a la derecha y el valor del límite a la izquierda de x = 1 en la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Damos valores a la variable para valores próximos al punto $x = 1$. Para estimar el límite a la derecha nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores mayores que 1, utilizando la rama de la función definida para valores mayores que 1, es decir: $3x - 2$:

x	2	1'5	1'1	1'05	1'04	1'03	1'02	1'01	1'001	1'0001
$f(x)$	4	2'5	1'3	1'15	1'12	1'09	1'06	1'03	1'003	1'0003

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

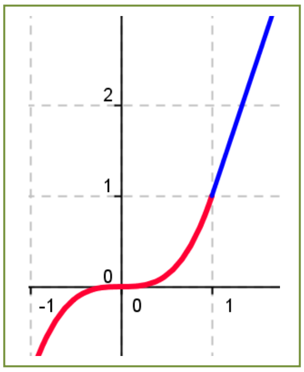
Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo mayor que 1: 2, 1'5, …, 1'001, 1'0001, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la derecha: 4, 2'5, …, 1'003, 1'0003.

Para estimar el límite a la izquierda nos aproximamos a 1, tanto como queramos, con valores menores que 1, utilizando la rama de la función definida para valores menores que 1, es decir: x^3:

x	0	0'5	0'7	0'9	0'95	0'97	0'98	0'99	0'999	0'9999
$f(x)$	0	0'125	0'343	0'729	0'857375	0'912673	0'941192	0'970299	0'997003	0'99970003

Observa cómo al aproximarnos a 1, siendo menor que 1: 0, 0'5, …, 0'999, 0'9999, los valores de la función se aproximan a 1, el valor del límite lateral por la izquierda: 0, 0'125, …, 0'997003, 0'99970003.

En este caso ambos límites laterales coinciden. Observa la gráfica de la función:



Existencia de Límite

Para que una función $f(x)$ tenga límite en un punto $x = a$, es necesario y suficiente que existan los límites laterales y coincidan, es decir:

Dada una función $f(x)$ y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima a a es L si se verifica que:

1) Existen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

2) Son iguales: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$.

Entonces decimos que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Actividades propuestas

2. Calcula los límites laterales y determina si existe el límite en las funciones siguientes definidas a trozos, en los puntos en los que se unen dos ramas:

a) $f(x) = \begin{cases} -2x+3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x\geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x+3}{x+5} & si\ x<1 \\ \dfrac{5x^2}{x+3} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{7}{x^2+4} & si\ x<1 \\ \dfrac{x-1}{x^2} & si\ x\geq 1 \end{cases}$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Límites infinitos

La definición es la misma que en el caso finito, sustituyendo el entorno del punto $x = a$ por un entorno del infinito.

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, $X = [a, +\infty)$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando x tiende a $+\infty$ es L, y se expresa: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, cuando para todo $\varepsilon > 0$, existe un $k > 0$ tal que, siempre que $x > k$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$..

De forma análoga podemos definir cuando el punto se aproxima a $-\infty$.

Caso general: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ k > 0$ tal que, si $|x| > k$, $x \in X$, se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$.

En ocasiones, para un determinado valor de la variable independiente, $x = a$, el valor de la función crece tanto como se quiera en valor absoluto:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\ k > 0, \exists\ \delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $|f(x)| > k$.

Observa que no nos estamos fijando en el signo de infinito.

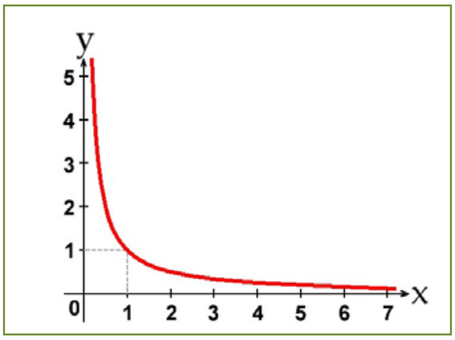
Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a$, se dice que el límite de $f(x)$, cuando se aproxima a $+\infty$, y se expresa: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$

Cuando para todo $k > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, $x \in X$, se cumple $f(x) > k$.

De forma análoga podemos definir cuando la función tiende a $-\infty$. Y también cuando el punto se aproxima a $+\infty$ y la función tiende a $+\infty$, cuando a $-\infty$…

Actividades resueltas

- *Observa la gráfica de la función y estima el valor del límite a la derecha de x = 0 y el límite cuando x tiende a +∞.*



El límite a la derecha de $x = 0$ es $+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, y el límite cuando x tiende a $+\infty$ observamos que es 0, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Los tipos de límites que nos podremos encontrar dependerán de los valores que tomen, tanto la variable independiente (x), como la función. Así, tendremos:

Actividades propuestas

3. Escribe la definición de $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5. Utiliza la definición de límite infinito para probar que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

1.3. Tipos de límites

Los tipos de límites que nos podremos encontrar dependerán de los valores que tomen, tanto la variable independiente (*x*), como la función. Así, tendremos:

- **Valor** del **Límite** $\begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases}$

- **Valor** al que tiende la **variable independiente** $\begin{cases} \text{Finito} \\ \text{Infinito} \end{cases}$

Haciendo las combinaciones de ambos elementos, tendremos cuatro posibilidades:

		VALOR VARIABLE INDEPENDIENTE	
		FINITO	**INFINITO**
VALOR DEL LÍMITE	**FINITO**	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
	INFINITO	$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Actividades resueltas

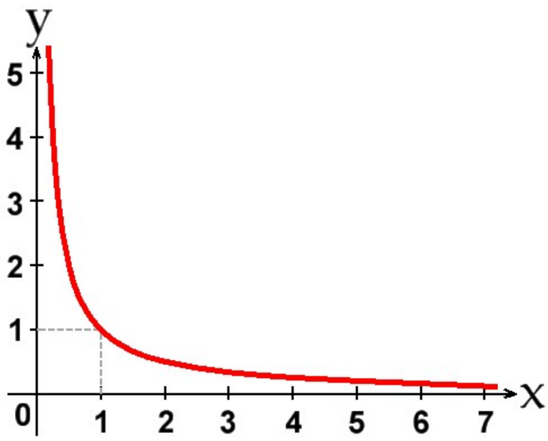
- *Veamos algunos ejemplos de tipos de límites.*

Límite finito en punto finito

En este caso el valor del límite es finito cuando la variable independiente tiende a un valor finito.

En la función: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to$ **1** el límite de la función es **1:**

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = 1$$



Límite finito en punto infinito

En la función anterior, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cuando $x \to \infty$, el límite es **0**:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Limite infinito en punto finito

En la misma función de la gráfica, $f(x) = \dfrac{1}{x}$, cuando $x \to$ **0**, el límite tomará el valor ∞:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

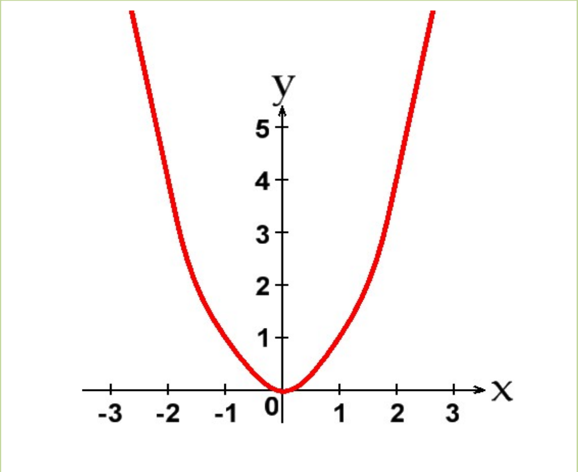
Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Límite infinito en punto infinito.

En el caso de valor de límite infinito cuando la variable independiente tiende a infinito, deberemos tomar otra función cualquiera que sea siempre creciente a partir de un valor.

Sea la función, $f(x) = x^2$. El límite de la función, cuando x tiende a ∞, toma el valor ∞**:**

$$\lim_{x \to \infty} x^2 = \infty .$$



Actividades propuestas

6. Clasifica los siguientes límites en finitos o infinitos, y calcúlalos:

a) $\lim_{x \to \infty} - x^2$

b) $\lim_{x \to \infty} + x^2$

c) $\lim_{x \to 3} x^2$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2}$

7. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x \to +\infty} - x^3$

b) $\lim_{x \to -\infty} - x^3$

c) $\lim_{x \to \infty} x^2$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$

e) $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$

8. Calcula los siguientes límites, indicando el signo:

a) $\lim_{x \to 1^+} \frac{5}{x-1}$

b) $\lim_{x \to 1^-} \frac{5}{x-1}$

c) $\lim_{x \to 3^+} \frac{-5}{x-3}$

d) $\lim_{x \to 3^-} \frac{-5}{x-3}$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

1.4. Asíntotas

Las asíntotas de una función (caso de existir) son rectas del plano a las que la función se aproxima tanto como queramos.

Puesto que, las asíntotas, son rectas del plano, podrán ser **horizontales**, **verticales** y **oblicuas**.

Asíntotas horizontales

Para que, una recta horizontal, sea asíntota de una función se debe cumplir la siguiente condición:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = K \text{ o } \lim_{x\to-\infty} f(x) = K$$

Entonces decimos que $y = K$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$.

Asíntotas verticales

Para que, una recta vertical, pueda ser asíntota de una función, se debe cumplir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$$

Entonces decimos que $x = a$ es una asíntota de $y = f(x)$. La recta $x = a$ es vertical.

Las posibles asíntotas verticales de una función, estarán en los puntos de la función que no pertenezcan a su dominio y se debe cumplir que el límite de la función, cuando el valor de x tiende a ese punto, se hace muy grande en valor absoluto, es decir, tome el valor

Asíntotas oblicuas

Para que una recta oblicua ($y = mx + n$) pueda ser asíntota de una función, deben existir, y ser finitos, los límites siguientes:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ y } n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Ramas parabólicas

Pero en muchas ocasiones no hay ni asíntotas horizontales ni asíntotas oblicuas. Ya conoces bien, por ejemplos, la parábola $y = x^2$, que cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$ la función crece sin aproximarse a ninguna recta. Por simplificación, se dice en todos estos casos que hay una rama parabólica.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades resueltas

- *La función:* $f(x)=\frac{1}{x}$ *tiene una asíntota horizontal,* $y = 0$ *y una asíntota vertical* $x = 0$.

Ya lo hemos visto en actividades anteriores.

- *Determina la asíntota oblicua, si existe, de la función:* $f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$.

Calculamos el límite $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{x\cdot(x-1)}=1$. Por tanto existe una asíntota oblicua de pendiente $m = 1$.

Calculamos la ordenada en el origen con el límite:

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+4)\cdot(x-2)-x\cdot(x-1)}{(x-1)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2+4x-2x-2)-(x^2-x)}{(x-1)}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-2}{x-1}\right)=3$$

Por tanto la recta $y = x + 3$ es una asíntota oblicua de la función.

- *La funciones:* $f(x)=x^3$, $f(x)=(-x)^3$, $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, *tienen ramas parabólicas en su comportamiento en el infinito.*

Observa que $\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$, luego $f(x)=x^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty}(-x)^3=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}(-x)^3=+\infty$, luego $f(x)=(-x)^3$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty}x^4=+\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}x^4=+\infty$, luego $f(x)=x^4$ tiene una rama parabólica.

$\lim_{x\to+\infty}-x^4=-\infty$ y $\lim_{x\to-\infty}-x^4=-\infty$, luego $f(x)=-x^4$ tiene una rama parabólica.

- *Asíntotas de la función:* $f(x)=\frac{(x+4)}{(x-1)}$.

La función $f(x)=\frac{(x+4)}{(x-1)}$ tiene una asíntota vertical en $x = 1$, pues para $x = 1$ la función no está definida, no pertenece a su dominio de definición, y el límite a la derecha y la izquierda, tiende a infinito.

Al analizar el comportamiento de la función cuando la variable independiente tiende a infinito, tanto a $+\infty$, como a $-\infty$, la función se acerca a 1, tiene una asíntota horizontal, $y = 1$.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades propuestas

9. Determina las asíntotas verticales de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)}$

b) $f(x)=\frac{x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{(x-1)\cdot(x+4)}$

d) $f(x)=\frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

10. Determina la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-3)}$ b) $f(x)=\frac{3x\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\frac{(x+4)^2}{2(x-1)\cdot(x-4)}$ d) $f(x)=\frac{(x+4)}{(x-1)\cdot(x-3)\cdot(x-5)\cdot(x+1)}$

11. Determina la asíntota oblicua, si existe, de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\frac{(x+4)\cdot(x-2)}{(x-1)}$ b) $f(x)=\frac{3x^2\cdot(x+4)}{(x-2)\cdot(x-3)}$

c) $f(x)=\frac{x^2+4}{2(x-1)}$ d) $f(x)=\frac{(2x^2+4)}{(x+1)}$

12. Analiza el comportamiento en el infinito de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x)=(x+4)^2$ b) $f(x)=\frac{3}{(x-2)^2}$ c) $f(x)=x^3+4$ d) $f(x)=\frac{2x^5+4}{x+1}$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

2. CÁLCULO DE LÍMITES

Habrás observamos que calcular límites utilizando la definición puede ser muy complicado. Por eso nos interesa obtener propiedades y encontrar procedimientos que nos permitan calcularlos con mayor soltura.

2.1. Propiedades de los límites

Para estudiar las operaciones con los límites vamos a suponer que f y g son dos funciones definidas sobre un mismo intervalo X y con valores en $\Re$. Cuando indicamos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pueden ser a y L tanto números reales como $\pm\infty$.

Respecto de la suma de funciones:

El límite de la suma de dos funciones, es igual a la suma de los límites de las funciones (siempre que la operación entre los límites esté definida y dichos límites existan), y se expresa así:

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Análogo es para la resta de funciones.

Respecto del producto de funciones:

El límite del producto de dos funciones, es igual al producto de los límites de las funciones (siempre que dichos límites existan y la operación entre los límites esté definida), y se expresa así:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es una constante, en ese caso, la expresión queda:

$$\lim_{x \to a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Respecto del cociente de funciones:

El límite del cociente de dos funciones, es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que los límites existan, la operación entre los límites esté definida y que $\lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$, y se expresa así:

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x \to a} g(x) = M \neq 0$$

Respecto de la potencia de funciones:

El límite de una potencia de funciones, es igual, en general, a la potencia de los límites de las funciones, y se expresa así:

$$\lim_{x \to a} (f(x)^{g(x)}) = \lim_{x \to a} f(x)^{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Analizaremos casos particulares en el cálculo de límites, como cuando el límite de la base sea 1, y el exponente tienda a infinito.

Un caso particular se presenta cuando una de las funciones es constante, en ese caso, la expresión es:

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

$$\lim_{x\to a}(f(x)^K) = (\lim_{x\to a} f(x))^K$$

Respecto de la composición de funciones:

El límite de la composición de funciones, es igual a la composición de los límites de las funciones, siempre que g sea continua en $f(x)$, y se expresa así:

$$\lim_{x\to a}(g(f(x))) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$ si g es continua en $f(x)$.

2.2. Operaciones con ∞ y 0

Para poder calcular límites, debemos conocer previamente ciertas operaciones con ∞ y 0, y ciertas propiedades que tienen los límites respecto de algunas operaciones matemáticas como son la suma-resta, multiplicación-división, potencias, composición, etc.

Si sumamos, restamos, multiplicamos … dos números reales, no tenemos ningún problema para saber el resultado, pero ¿y si es el ∞? Observa la tabla siguiente y comprueba que en ocasiones sí sabemos el resultado, pero en otras, decimos "*indeterminado*" pues no lo sabemos de forma inmediata, debemos trabajar más para saberlo.

SUMA	**PRODUCTO**	**COCIENTE**	
$\infty \pm K = \infty$	$K \cdot \infty = \infty$	$\frac{0}{K} = 0$	$\frac{K}{0} = \infty$
$\infty + \infty = \infty$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$\frac{\infty}{K} = \infty$	$\frac{K}{\infty} = 0$
$\infty - \infty =$ Indeterminado	$0 \cdot \infty =$ Indeterminado	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{0} = \infty$
		$\frac{0}{0} =$ Indeterminado	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado

POTENCIAS		
$K^0 = 1$	$0^K = \begin{cases} 0 & si\ K \geq 0 \\ \infty & si\ K < 0 \end{cases}$	$0^0 =$ Indeterminado
$0^\infty = 0$	$K^\infty = \begin{cases} 0 & si\ 0 < K < 1 \\ \infty & si\ K > 1 \end{cases}$	$\infty^0 =$ Indeterminado
$\infty^\infty = \infty$		$1^\infty =$ Indeterminado

Nota:

Indeterminado no significa que no pueda existir el límite, sino que será necesario realizar algunas operaciones previas para poder determinar si existe, y su valor.

2.3. Proceso de cálculo de límites

El proceso de cálculo de un límite consiste en sustituir la variable por el valor al que tiende y operar, obteniendo el resultado del límite que podrá ser un valor **finito**, **infinito** o **indeterminado**.

Actividades resueltas

- *Calcula los límites siguientes:*

Así, por ejemplo, podemos calcular los siguientes límites simplemente sustituyendo:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+5x-3}{x+3}=\frac{(4)^2+5(4)-3}{(4)+3}=\frac{16+30-3}{7}=\frac{33}{7}$$

$$\lim_{x\to 7}\sqrt[2]{3x+2}=\sqrt[2]{3(7)+2}=\sqrt[2]{21+2}=\sqrt[2]{23}$$

El límite de $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ pues según vimos en las operaciones con ∞, al dividir un número por algo que tendía a ∞ se obtenía 0.

Como infinito no es un número real, cuando el límite tiende a infinito, decimos que no existe.

Los **límites laterales** de una función sólo existen cuando el valor hacia el que tiende la variable independiente sea siempre un valor finito, ya que si fuera $+\infty$, no pueden existir valores a la derecha y si fuera $-\infty$ no pueden existir valores a la izquierda. Por lo tanto, los **límites laterales** se podrán calcular cuando el valor de la **variable independiente** sea **finito**.

Para calcular los límites laterales procederemos a realizar un cambio de variable, de tal modo que, siempre nos movamos en valores al lado que queramos calcular. Así, si queremos estar a la derecha del valor al que tiende la variable independiente, le sumaremos siempre una cantidad que cada vez es más pequeña (que tiende a cero), con lo que nos aproximaremos al valor deseado. Por ejemplo, supongamos que la variable $x \to$ **4**, el cambio que deberemos hacer será x = **4** + h, con $h > 0$, tomando valores que tienden a cero.

Si, por el contrario, quisiéramos aproximarnos a **4** desde la izquierda, lo que deberemos hacer será restarle esa misma cantidad, cada vez más pequeña, con lo que nos aseguramos que tendemos al valor de cuatro desde valores inferiores a él.

Esto anterior, lo podemos expresar:

$x \to a \equiv x = a \pm h$, con $h \to$ **0.** $\begin{cases} + \to \textit{derecha} \\ - \to \textit{izquierda} \end{cases}$

Actividades resueltas

- *Sea la función* $f(x) = x^2 + 5x - 3$ *y deseamos calcular los límites laterales cuando* $x \to$ **4.**

Calculamos el límite por la derecha, haciendo el cambio de variable x = **4** + h, con $h \to$ **0**

$$\lim_{x\to 4} x^2+5x-3=\lim_{h\to 0}(4+h)^2+5(4+h)-3=\lim_{h\to 0}((16+8h+h^2)+(20+5h)-3)=$$

$$\lim_{h\to 0}(33+13h+h^2)=33+13\cdot 0+0^2=33$$

Calculamos el límite por la derecha, haciendo el cambio de variable x = **4** – h, con $h \to$ **0**

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

$$\lim_{x\to 4} x^2+5x-3=\lim_{h\to 0}(4-h)^2+5(4-h)-3=\lim_{h\to 0}((16-8h+h^2)+(20-5h)-3)=$$
$$\lim_{h\to 0}(33-13h+h^2)=33-13\cdot 0+0^2=33$$

Como ambos límites existen y son iguales, podemos decir que

$$\lim_{x\to 4} x^2+5x-3=33$$

2.4. Indeterminaciones

Como hemos visto en el apartado anterior, en algunas operaciones con ∞ y 0, no podíamos llegar a determinar el valor, puesto que resultaba una *indeterminación*. Existen algunos tipos de indeterminaciones que son resolubles haciendo operaciones y/o simplificaciones previas que estudiamos a continuación. Analizaremos como resolver cada caso de indeterminación.

Indeterminación ∞ – ∞

Este tipo de indeterminaciones se pueden resolver haciendo operaciones con ambas funciones, ya que suelen ser del tipo $f(x)-g(x)$.

Actividades resueltas

- $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty\to$ Indeterminado

Pero si hacemos operaciones y las sumamos previamente:

$$\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\frac{1-(x+2)}{x^2-4}=\frac{-x-1}{x^2-4}$$

Calculamos el límite de la función, y nos resulta

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{-x-1}{x^2-4}=\frac{-2-1}{2^2-4}=\frac{-3}{4-4}=-\infty$$

pues el denominador tiende a 0.

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\frac{1}{0}-\infty=\infty-\infty\to$ Indeterminado

Como $tg(x)=\frac{senx}{\cos x}$, operando tendremos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\to \text{Indeterminado}$$

Hemos pasado de una INDETERMINACION del tipo ∞ – ∞, a otra del tipo $\frac{0}{0}$ que todavía no sabemos resolver.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades propuestas

13. Calcula el límite: $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}\right)$

14. Calcula el límite: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

15. Calcula el límite: $\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$

16. Calcula el límite: $\lim_{x\to -2}\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{x^2-4}\right)$

Indeterminación 0 · ∞

Normalmente suelen darse en productos de funciones $f(x) \cdot g(x)$, donde $f(x) = 0$ y $g(x) = \infty$ Suelen resolverse operando y simplificando.

Actividades resueltas

- $\lim_{x\to -3}(x^2+6x+9)\cdot\left(\frac{1}{x+3}\right)=0\cdot\infty$ → Indeterminado

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 + 6x + 9$, obtenemos que $x = -3$ es una raíz doble, por lo que los factores del polinomio son $(x + 3)^2$ y sustituyéndolo en la ecuación nos queda

$$(x^2+6x+9)\left(\frac{1}{x+3}\right)=(x+3)^2\left(\frac{1}{x+3}\right)=\left(\frac{(x+3)^2}{x+3}\right)=(x+3)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x\to -3}(x^2+6x+9)\cdot\left(\frac{1}{x+3}\right)=\lim_{x\to -3}(x+3)=-3+3=0$$

- El límite siguiente también es indeterminado (es decir, todavía no lo hemos determinado).

$\lim_{x\to 2}(x-2)\cdot\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)$ → Indeterminado

Si calculamos las raíces del polinomio $x^2 - x - 2$, obtenemos que son $x = -1$ y $x = 2$, por lo que los factores del polinomio son: $x^2 - x - 2 = (x + 1)\cdot(x - 2)$ y, sustituyéndolo en el límite, nos queda:

$$(x-2)\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)=(x-2)\cdot\left(\frac{1}{(x+1)\cdot(x-2)}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Calculamos, ahora, el límite de la función simplificada, y obtenemos:

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\left(\frac{1}{x^2-x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades propuestas

17. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\right)$

18. Calcula el límite: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2-1}\right)$

Indeterminación 0/0

Este tipo de indeterminaciones se producen porque existen algunos factores en el numerador y denominador que lo hacen cero y que será conveniente eliminar por algún método matemático. Para ello, debemos factorizar polinomios, multiplicar y dividir por el conjugado o cualquier otro procedimiento que nos permita eliminar la indeterminación.

Actividades resueltas

- Si retomamos el segundo ejemplo de las indeterminaciones , donde operando habíamos llegado a una indeterminación de este tipo, que resolveremos a continuación.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{sen(x)}{\cos(x)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\to \text{Indeterminado}$$

Si multiplicamos, numerador y denominador, por el conjugado del numerador (1 + $sen(x)$), obtenemos

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-tg(x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-senx}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-senx)\cdot(1+senx)}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(1-sen^2x)}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2 x}{\cos x\cdot(1+senx)}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{1+senx}\right)=\left(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{1+sen\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{0}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado, por lo que calculamos los factores de los polinomios del numerador y denominador, y simplificando lo posible, obtenemos::

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+2)\cdot(x-1)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$$

- Si sustituimos valores en el siguiente límite, también es indeterminado. Uno de los sumandos es una raíz, por lo que para quitar la indeterminación vamos a probar multiplicando por el conjugado:

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{5+x}-2)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{5+x})^2-2^2)}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{5+x-4}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)\cdot(\sqrt{5+x}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{(\sqrt{5+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

Actividades propuestas

19. Calcula el límite: $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-9}\right)$

20. Calcula el límite: $\lim_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}\right)$

21. Calcula el límite: $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3}}{x}\right)$

22. Calcula el límite: $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{2-\sqrt{2+x}}{x-2}\right)$

Indeterminación ∞/∞

Aunque pueden presentarse muchos casos, el más frecuente es el de cocientes de polinomios cuando la variable independiente tiende a ∞.

Así tendremos que

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} Q(x) = \infty$$

Luego $\lim_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ es una indeterminación del tipo ∞/∞.

Para resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario comparar el grado del polinomio del numerador con el grado del polinomio del denominador, pudiéndose presentar los siguientes casos:

Si grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \pm\infty$

Si grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = K$

Si grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$) entonces $\lim_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Para resolver este tipo de límites observamos que cuando la variable se hace muy grande el límite vendrá dado por los términos de mayor grado. Nos quedamos con ellos, y simplificamos.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividades resueltas

- **grado($P(x)$) = grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2+2x-4}{x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}8=8$$

Observa lo que ocurre si damos valores:

x	1	10	100	1000		−1	−10	−100	−1000
$f(x)$	1	7'77	8'01559	8'00195599		0'3333	7'3904	7,9756	7'99756

Se aproxima, a 8 tanto a la derecha como a la izquierda.

- **grado($P(x)$) > grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x-3}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{1}=\infty$$

- **grado($P(x)$) < grado ($Q(x)$):**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7}{4x^3+2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{4x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{4x}=0.$$

En el caso de límites infinitos de cociente de polinomios podemos simplificar los cálculos pues hemos visto que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_mx^m+\ldots+b_0}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=\begin{cases}\infty & si \quad n>m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & si \quad n=m\\ 0 & si \quad n<m\end{cases}$$

Actividades propuestas

23. Escribe, sin hacer cálculos, el valor de los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^2+2x-1}$ b) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5+3}{5x^2+2x-1}$ c) $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3}{5x^7+2x-1}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-2x+5}{2x^3+x^2-x}$

24. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2}{x-1}-3x\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-3x}\right)$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-3}\right)$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

25. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (senx)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^5-7x}{x^5+100x^2} \right)$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(x))$

Indeterminación 1^∞

Para poder resolver este tipo de indeterminaciones, es necesario conocer el número e, que se define como: $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \approx 2'718282$

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ entonces $e = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} \approx 2'718282$

Las soluciones de este tipo de indeterminaciones pasan, irremediablemente, por llegar a una expresión del tipo de la definición del número e. Observamos que es el límite de una potencia en la que la base tiende a 1, y el exponente tiende a infinito. Así, cuando al calcular un límite estemos en esa situación decimos que es un **límite tipo** e. Veamos algunos ejemplos.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividad resuelta

- *En el límite siguiente*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}$$

La base tiende a 1, y el exponente a ∞ luego es un límite tipo ***e***. Para resolverlo, primero completamos el primer 1 de la definición, y luego el segundo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-2+2+1}{2x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-2}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1}$$

Luego hacemos el exponente igual al denominador para lo que multiplicamos y dividimos el exponente por el denominador del sumando de la base. Así, tendremos

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}}$$

El límite de la base es ***e*** y el límite del nuevo exponente en este caso es 3, por lo que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\frac{2x-2}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\frac{3}{2x-2}}=e^3$$

Este tipo de indeterminaciones, también se pueden resolver mediante la expresión:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Actividad resuelta

- No es un límite tipo e. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{2x+1}$

Calculamos los límites de la base: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)=\infty$

Como $\frac{2}{3}$ es menor que 1, al multiplicarlo por sí mismo infinitas veces, el límite es 0.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{2x+1}=0$$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Indeterminación 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Este tipo de indeterminaciones exponenciales se resuelven mediante la aplicación de logaritmos neperianos (ln). Suponemos que el límite de estas indeterminaciones es

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = e^L$$

Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad, tendremos

$$\ln\left(\lim_{x \to a} \left(f(x) \right)^{g(x)} \right) = \ln(e^L)$$

Y por propiedades de los límites y de los logaritmos se tiene:

$$\lim_{x \to a} \left(\ln\left(f(x) \right)^{g(x)} \right) = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} (\ln(f(x)) = \ln(e^L) = L \cdot \ln(e) = L$$

Por tanto:

$$L = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} (\ln(f(x)) \text{ y } \lim_{x \to a} \left(f(x) \right)^{g(x)} = e^L$$

Actividades propuestas

26. Determina los límites siguientes:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x^2-1}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+5} \right)^{3x^2}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

27. Determina los límites siguientes (observa que *no* son tipo e):

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+3}{x+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x}}$

b) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3-1}{4x^3+5} \right)^{3x^2}$

c) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2+x}{3x^2-2} \right)^{\frac{2x^2-1}{x^3}}$

d) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x+3}{5x^2+1} \right)^{\frac{x^2-1}{5x^3}}$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

3. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Intuitivamente, podemos decir que una función es continua en un punto si somos capaces de pintarla, en ese punto, sin levantar el lápiz del papel, o si somos capaces de recorrerla con el dedo sin encontrarnos ningún obstáculo (saltos, indefiniciones, etc.). Pero la continuidad de una función se puede estudiar en un punto, en un intervalo o en todo su dominio de forma más precisa.

3.1. Continuidad de una función en un punto

En lenguaje matemático, la anterior definición simple, se complica un poco y lo expresamos así:

Dada una función $f(x)$: $X \to \Re$, X un intervalo de $\Re$, y un punto $x = a \in X$, se dice que la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si:

Para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|x - a| < \delta$, $x \in X$ se cumple que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Esto lo podemos expresar diciendo que, si nos acercamos al punto a, entonces las imágenes de la función se aproximarán a la imagen de a. Si esto no ocurre, entonces, la función **no** será continua en $x = a$ y diremos que la función tiene una discontinuidad en $x = a$.

Observa que si comparas la definición de continuidad con la de límite, ahora el punto a debe pertenecer al intervalo X, mientras que en la de límite podía no ocurrir. Esta relación puede expresarse de la siguiente forma:

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$ sí, y solo sí, se cumplen estas tres condiciones:

- Que para el punto $x = a$ exista $f(a)$.
- Que exista y sea finito el límite de la función para $x = a$, lo que implica que existan los límites laterales y coincidan.
- Que los dos valores anteriores coincidan:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Bajo estas tres condiciones, la función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

Continuidad de una función en un intervalo abierto

Para que una función sea continua en un intervalo abierto, la función debe ser continua en todos los puntos del intervalo.

Si lo fuera en todo el dominio, decimos que la función es continua.

Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x + 2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

Las funciones polinómicas son continuas en toda la recta real. El único punto dudoso es $x = 2$.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Estudio de la continuidad de la función en el punto x = 2:

Comprobemos, como primera medida, que la función está definida en x = 2.

Para x = 2, tenemos que determinar $f(2) = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$, luego existe.

Calculamos, entonces los límites laterales de la función para x = 2.

Limite por la izquierda: $\lim_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$

Limite por la derecha: $\lim_{x\to 2} 3x + 2 = 3\cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

Los límites laterales, existen, son finitos y coinciden.

Veamos si coincide, el límite de la función con el valor de la función en x = 2.

$$f(2) = 8 = \lim_{x\to 2} f(x)$$

Luego, como se cumplen las tres condiciones, la función es continua en x = 2.

3.2. Propiedades de las funciones continuas

Las funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas serán siempre continuas en su dominio.

Por lo tanto, presentarán discontinuidades en aquellos puntos en los que no esté definida y, por lo tanto, no pertenezcan a su dominio.

Operaciones de funciones continuas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el punto $x = a$, entonces podemos afirmar que:

$f(x) + g(x)$ es continua en $x = a$.

$f(x) \cdot g(x)$ es continua en $x = a$.

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x = a$, si $g(a) \neq 0$.

$f(g(x))$ es continua en $x = a$, si f es continua en $g(a)$.

Actividades resueltas

- Las funciones polinómicas son funciones continuas en todo $\Re$.

Basta comprobar que la función $f(x) = x$, la función $f(x) = a$ son funciones continuas para comprobar que cualquier función polinómica es suma y producto de estas funciones.

- Las funciones racionales son continuas en todo $\Re$ salvo para los valores que anulan al denominador. Estudia la continuidad de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.

En efecto, las funciones racionales son cociente de funciones polinómicas, que son continuas en toda la recta real. La función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ es continua en $\Re$ – {2, –2}, pues el denominador se anula en dichos valores.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

3.3. Tipos de discontinuidad

Existen varios tipos de discontinuidades de las funciones, que se expresan en el cuadro siguiente:

<table>
<tr><td rowspan="2">EVITABLES

(Existen los límites laterales y son finitos e iguales)</td><td colspan="2">No existe imagen $f(a)$ en el punto</td></tr>
<tr><td colspan="2">La imagen $f(a)$ existe pero no coincide con los límites laterales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">INEVITABLES

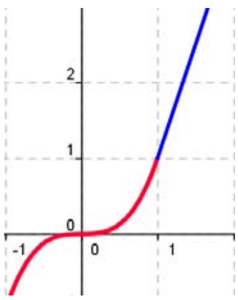
Los límites laterales no existen, bien porque alguno es infinito o porque son distintos, o alguno de los límites laterales no existe.</td><td rowspan="2">De primera especie</td><td>De salto finito (Límites laterales finitos pero distintos)</td></tr>
<tr><td>De salto infinito (Alguno (o los dos) límites laterales son infinitos)</td></tr>
<tr><td>De segunda especie</td><td>No existe alguno de los límites laterales.</td></tr>
</table>

Las **discontinuidades evitables**, se llaman así porque se pueden solventar mediante la redefinición de la función en el punto, bien porque no estuviera definida, bien porque no coincidiera la imagen con los límites laterales, que existen, coinciden y son finitos.

Las **discontinuidades inevitables** vienen dadas porque:

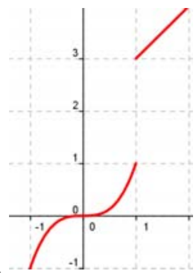
- los límites laterales existen, son finitos y no coinciden (de **primera especie** de salto finito). Salto es igual a $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) - \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$
- existen pero alguno es infinito (de primera especie de salto infinito). Salto infinito.
- o no existe alguno de los límites laterales o los dos (de **segunda especie**).

Discontinuidad evitable



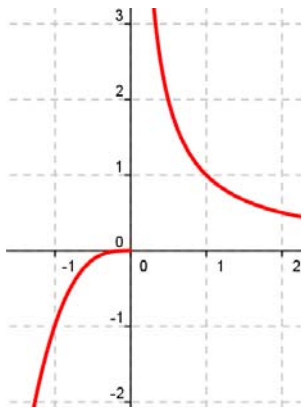
$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ 3x - 2 & si\ x > 1 \end{cases}$$

Discontinuidad de primera especie salto finito



$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 1 \\ x + 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

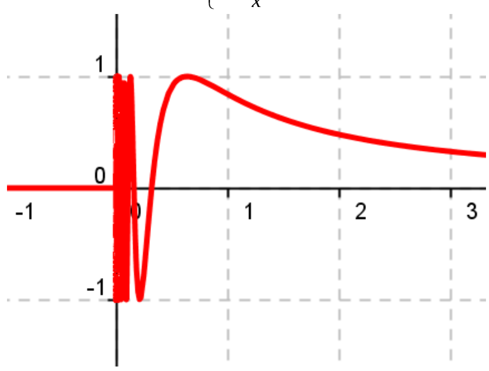
Discontinuidad de primera especie salto infinito



$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Discontinuidad de segunda especie

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ sen\,\dfrac{1}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$$



Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Actividad resuelta

- *Estudia la continuidad de los ejemplos anteriores.*

Observa que la función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$ no está definida en x = 1. Bastaría definir $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x\le 1 \\ 3x-2 & si\ x>1 \end{cases}$ para que la función fuese continua. Por tanto es una discontinuidad evitable en x = 1 siendo la función continua en $\Re - \{1\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<1 \\ x+2 & si\ x\ge 1 \end{cases}$ tiene ambos límites laterales en x = 1 y son finitos, pero distintos, por lo que tiene una discontinuidad de primera especie en x = 1 de salto finito, con salto 2. Es una función continua en $\Re - \{1\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} x^3 & si\ x<0 \\ \frac{1}{x} & si\ x\ge 0 \end{cases}$ tiene el límite a la derecha de 0, infinito, por lo que tiene en x = 0 una discontinuidad de primera especie de salto infinito. La función es continua en $\Re - \{0\}$.

La función $f(x)=\begin{cases} 0 & si\ x\le 0 \\ sen\frac{1}{x} & si\ x>0 \end{cases}$ no tiene límite a la derecha de 0. La función seno tiene fluctuaciones cada vez más juntas por lo que dicho límite no existe. Es una discontinuidad de segunda especie. La función es continua en $\Re - \{0\}$.

Actividades propuestas

28. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$

b) $f(x)=\sqrt{x-5}$

c) $f(x)=\log_2(x-3)$

d) $f(x)=\begin{cases} 2+x^2 & si\ x\le 0 \\ 1+e^x & si\ x>0 \end{cases}$

29. Determina el valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} 2-x^2 & si\ x\le 1 \\ k+x & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua en toda la recta real.

30. Estudia la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\begin{cases} -2x+3 & si & x<-1 \\ 2+x^2 & si & -1\le x\le 1 \\ \dfrac{3}{x} & si & x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=x-\sqrt{x-2}$

c) $f(x)=|x-3|-1$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

CURIOSIDADES. REVISTA

Reflexiones sobre el infinito

"El infinito, como ningún otro problema, siempre ha conmovido profundamente el alma de los seres humanos. El infinito como ninguna otra idea, ha tenido una influencia estimulante y fértil en la mente. Pero el infinito necesita, más que ningún otro concepto, clarificarse"

David Hilbert

Davis Hilbert

El hotel infinito

Para el dueño de un hotel es un disgusto tener que decir a un cliente que no le quedan habitaciones. Pero, ¿qué ocurriría si el hotel tuviera infinitas habitaciones numeradas 1, 2, 3, 4,…? Imagina que el hotel está completo y llega un nuevo cliente, ¿cómo lo alojarías?

¿Y si llegaran 100 clientes más? ¿Y si mil? ¿Y si llegaran tantos como hay?

La tabla de Caratheodory

Tenemos la siguiente tabla infinita:

0	1/2	1/4	1/8	1/16	…
–1/2	0	1/2	1/4	1/8	…
–1/4	–1/2	0	1/2	1/4	…
–1/8	–1/4	–1/2	0	1/2	…
–1/16	–1/8	–1/4	–1/2	0	
…	….	…	…	…	…

La suma 1/2 +1/4 + 1/8 + 1/16 + … = 1

- Suma la tabla primero por filas.
- Ahora suma la tabla por columnas
- Por último suma por diagonales. ¿Te sorprende el resultado?

Un juego

Un poco aburridos dos amigos, Daniel y Jorge, deciden jugar a un juego que consiste en que Daniel escriba números y Jorge los borre. El procedimiento propuesto por Daniel es:

- ✓ A las cinco menos un minuto yo escribo los números 1 y 2, y tú borras el 1.
- ✓ A las cinco menos medio minuto yo escribo 3 y 4, y tú borras el 2.
- ✓ A las cinco menos un tercio de de minuto yo escribo 5 y 6 y tú borras el 3

  Y así sucesivamente. Juegan con la imaginación.
- ✓ Daniel pregunta a Jorge: A las cinco menos una centésima de minuto, ¿cuántos números te quedarán por borrar?
- ✓ ¿Y a las cinco menos una millonésima de minuto?
- ✓ ¿Hay algún número que no puedas borrar antes de las cinco?

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

Breve historia del concepto de límite de una función

El concepto de límite es clave para dar rigor al Análisis Matemático. No sólo lo necesitamos para conocer el comportamiento de las funciones en el infinito, asíntotas y ramas asintóticas, y estudiar su continuidad, sino que es fundamental para el estudio del cálculo infinitesimal, de las derivadas y las integrales.

D'Alembert (1767) estudia a Newton y en la *Enciclopedia* en el artículo sobre "*Límite*" escribe: "*Una cantidad es el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada*".

Jean le Rond D'Alembert

Augustin Louis Cauchy

Cauchy (1829) en su Curso de Análisis, formula: "*Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.*"

Heine (1872), en sus "Elementos", siguiendo las lecciones de Weierstrass, escribe: "*Si, dado cualquier* ε, *existe un* $\delta > 0$, *la diferencia* $f(x_0 \pm \delta) - L$ *es menor en valor absoluto que* ε, *entonces se dice que* L *es el límite de* $f(x)$ *para* $x = x_0$."

Heinrich Heine

Observa cómo se fue perfilando la definición y surgió el ε y el δ para formalizar las ideas de *aproximarse hasta diferir menos que, aproximarse tanto como se quiera, diferir tan poco como queramos…*

El número e y el problema de Bernoulli

El número irracional *e* aparece con John Napier (Neper) que introdujo el concepto de logaritmo en el cálculo matemático (1614). Es la base de los logaritmos neperianos.

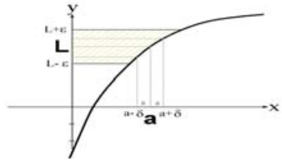
La primera aproximación al valor de este número se atribuye a Jacob Bernoulli (1654-1705) asociado al siguiente problema de interés compuesto:

Si se invierte un capital C con un interés del 100 % anual y se pagan los intereses una vez al año, se obtiene un capital 2C. Si los intereses se pagan semestralmente, el capital se transforma en: $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot C$ = 2,25 *C. Si los intereses se pagan trimestralmente, se obtiene* $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 \cdot C$ = 2,44 *C. En caso de pagos mensuales, el capital que se obtiene es* $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} \cdot C$ = 2,61 C y si *los pagos son diarios se consigue:* $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365} \cdot C$ = 2,71 C.

Al aumentar la cantidad de períodos de pago el factor que multiplica al capital *C* se aproxima al número *e* = 2,7182818284…

$$e = lim\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

RESUMEN

		Ejemplos
Definición de límite	$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, siempre que $\lvert x - a \rvert < \delta$, se cumple $\lvert f(x) - L \rvert < \varepsilon$.	
Límite lateral a la derecha	$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x > a$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene de límite lateral a la izquierda 8, y de límite lateral a la derecha también 8, pues $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$ $\lim_{x \to 2} 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 6 + 2 = 8$
Límite lateral a la izquierda	$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ el valor de $f(x)$ cuando x tiende a a, siempre que se cumpla la condición $x < a$	
Existencia de límite	$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ tiene límite en $x = 2$
Asíntotas	Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$ hay una asíntota horizontal $y = K$. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ hay una asíntota vertical $x = a$.	$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ asíntota horizontal, $y = 0$ y asíntota vertical $x = 0$
Propiedades de los límites	$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ $\lim_{x \to a} (K \cdot f(x)) = K \cdot \lim_{x \to a} f(x)$ $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $g(a) \neq 0$.	
Continuidad de una función en un punto	Una función $f(x)$ es continua en el punto $x = a$, si para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $\lvert x - a \rvert < \delta$, se cumple que $\lvert f(x) - f(a) \rvert < \varepsilon$.	La función $f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$
Propiedades de las funciones continuas	La suma y el producto de funciones continuas es una función continua. El cociente de funciones continuas es una función continua si no se anual el denominador.	Los polinomios son funciones continuas en $\Re$ $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $\Re - \{0\}$
Tipos de discontinuidad	Evitable. De primera especie de salto finito. De primera especie de salto infinito. De segunda especie	$f(x) = \begin{cases} x^3 & si\ x < 2 \\ 3x+2 & si\ x > 2 \end{cases}$ evitable en $x = 2$ $f(x) = \frac{1}{x}$ de primera especie con salto infinito en $x = 0$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

EJERCICIOS Y PROBLEMAS.

Límites

1. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{x^2-9}$

b) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$

c) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3+27}{x^2+3x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-4}{x-1}$

g) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3+8x-2}{-x^2-2x+3}$

2. Calcula los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+8}{-x^5-2}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3+8}{-x^3-2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x+2} \right)$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{3x}{x^2-4} - \dfrac{x-3}{x+2} \right)$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{3x-1} - \sqrt{x^2-2x} \right)$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} \right)$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}} \right)$

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

3. Determina las asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

b) $f(x)=\dfrac{5}{x^2-4}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-1}$

e) $f(x)=\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

f) $f(x)=\dfrac{-5x^2-5}{(x-1)^2}$

g) $f(x)=\ln\dfrac{-5x}{(x-1)^2}$

h) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-5x}{(x-1)^2}}$

Continuidad

4. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\begin{cases} 3^x & x<-2 \\ 4-x^2 & -2\le x\le 1 \\ \log_2 x & x>1 \end{cases}$ b) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x<0 \\ x^2-3x & 0\le x<3 \\ \sqrt{x-3} & x\ge 3 \end{cases}$ c) $h(x)=|x^2-5x|$

5. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=|x^2-25|$ b) $g(x)=2-\dfrac{|x|}{x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-2|x|}{x-3}$

6. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x^2-4x+3}$ b) $g(x)=\dfrac{7x+2}{x^2+x}$ c) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-2x-3}$

7. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{x^2-4}}$ c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3-x}{x^2-3x}}$

8. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = \ln\left(\dfrac{4-x}{x-5}\right)$ b) $g(x) = \ln\left(-x^2 - x + 2\right)$ c) $h(x) = \ln\left(\dfrac{9-x^2}{(x-3)^2}\right)$

9. Estudia la continuidad de las funciones siguientes, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad.

a) $f(x) = e^{\frac{x^2-9}{7+x}}$ b) $g(x) = e^{\sqrt{x-5}}$ c) $h(x) = 2^{\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1}}$

10. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x<0 \\ 2+e^x & x \geq 0 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

11. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & x<2 \\ k+x & x \geq 2 \end{cases}$

a) Determina el valor de *k* para que la función sea continua en toda la recta real
b) Representa su gráfica

12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} x-3 & \cdots x<-1 \\ x^2-5 & -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & x \geq 1 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

13. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x<2 \\ x^2-4 & x \geq 2 \end{cases}$

a) Estudia su continuidad
b) Representa su gráfica

14. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

15. Esboza la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-25}$ indicando sus asíntotas y sus puntos de discontinuidad.

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia

AUTOEVALUACIÓN

1. El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2/3

2. El límite $\lim_{x\to -2}(x^2-x-2)\cdot\left(\frac{1}{x+2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 1 d) –1

3. El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}\right)$ vale:

a) ∞ b) 0 c) –2/3 d) –1

4. El límite $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2+x}-1}{x+1}$ vale:

a) 1/2 b) 0 c) –∞ d) –1

5. El límite $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^2+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

6. El límite $\lim_{x\to \infty}\frac{5x^3+7x-4}{x^3+3}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 5 d) 1

7. El límite $\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x+1}{3x-2}\right)^{2x^2+1}$ vale:

a) ∞ b) 0 c) 3 d) 1

8. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-3}{x} & si\ x<0\\ 3x+2 & si\ x\geq 0\end{cases}$ en x = 0.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

9. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3-3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x\geq 2\end{cases}$ en x = 2.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

10. Estudia la continuidad de $f(x)=\begin{cases}x^3 & si\ x<2\\ 3x+2 & si\ x>2\end{cases}$ en x = 2.

a) Es continua b) Tiene una discontinuidad evitable c) Un salto finito d) Un salto infinito

Autor: Luis Ángel Morales García
Revisora: Raquel Hernández
Ilustraciones: Elaboración propia