FRACCIONES ALGEBRAICAS EJERCICIOS

1. Utilizando identidades notables, desarrollar las siguientes expresiones:

a) $(x+2)^2$
b) $(x-2)^2$
c) $(x+2)(x-2)$
d) $(2x+3)^2$
e) $(3x-5)^2$
f) $(3x+2)(3x-2)$
g) $(ax+1)^2$
h) $(ax-b)^2$
i) $(3x-2)^2$
j) $(2x+5)(2x-5)$
k) $(-1+2x)^2$
l) $(-2-x)^2$
m) $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)$
n) $\left(x+\sqrt{2}\right)^2$
o) $(x^2+x+2)^2$

2. **a)** Razonar por qué $(A-B)^2$ y $(B-A)^2$ dan el mismo resultado. **b)** Ídem con $(A+B)^2$ y $(-A-B)^2$

3. Averiguar de qué expresiones notables proceden los siguientes polinomios (Fíjate en el 1^er^ ejemplo):

a) $x^2+2x+1=(x+1)^2$
b) x^2-4x+4
c) x^2-1
d) x^2+6x+9
e) $x^2-8x+16$
f) x^2-4
g) $9-x^2$
h) $x^2+2ax+a^2$
i) $3x^2+6x+3$
j) x^2-a^2
k) $a^2x^2-b^2$
l) x^2-16
m) $x^2+10x+25$
n) x^2-2
o) $4x^2-9$
p) $a^2x^2-2ax+1$
q) x^4-16
r) $4x^2+4x+1$
s) x^2-6x+9
t) x^2-25
u) $25x^2-16$

Ejercicios libro: ***pág. 34: 13; pág. 42: 35 y 36; pág. 43: 53*** *(pasar a identidad notable);* ***pág. 43: 54*** *(más elaborado)*

4. Utilizar **identidades notables** para simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\dfrac{x^2-16}{x^2-4x}$ $\left(\textit{Soluc}: 1+\dfrac{4}{x}\right)$

c) $\dfrac{2x+4}{2x-4}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

d) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2+6x+3}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{2x-2}{3x+3}\right)$

e) $\dfrac{x^2+2ax+a^2}{mx+ma}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x+a}{m}\right)$

f) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+xy}$ $\left(\textit{Soluc}: 1-\dfrac{y}{x}\right)$

g) $\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x+2}{x-2}\right)$

h) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^4-1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x+1}{x^3-x^2+x-1}\right)$

i) $\dfrac{x^2-2ax+a^2}{x^2-a^2}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{x-a}{x+a}\right)$

j) $\dfrac{a^2x^2-1}{a^2x^2+2ax+1}$ $\left(\textit{Soluc}: \dfrac{ax-1}{ax+1}\right)$

RECORDAR:

TEOREMA DEL FACTOR: "P(x) es divisible por x-a (o dicho de otra forma, P(x) contiene el factor x-a) si se cumple que P(a)=0"

Ejemplo: Dado $P(x)=x^2+x-2$, como $P(1)=0$, podemos asegurar que P(x) es divisible por x-1

De hecho, puede comprobarse que al factorizarlo se obtiene $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

5. Utilizar el **teorema del factor** para simplificar, siempre que sea posible, las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x-2}{x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{x+3}\right)$

b) $\frac{x-1}{2x^2-3x+1}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{2x-1}\right)$

c) $\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\frac{x^2-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+1}{5x+9}\right)$

e) $\frac{x+2}{x^2-1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

f) $\frac{x^2+x-2}{x+2}$ $(Soluc:\ x-1)$

g) $\frac{2x-2}{x^2+x-2}$ $\left(Soluc:\ \frac{2}{x+2}\right)$

h) $\frac{x-3}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

i) $\frac{x-1}{5x^2+4x-9}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{5x+9}\right)$

j) $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{x^2+x+1}{x+1}\right)$

k) $\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x+3}{x+2}\right)$

l) $\frac{x^2-a^2-a}{x^2-a^2}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+a+1}{x+a}\right)$

☞ *Ejercicio libro:* ***pág. 38: 20***

6. Averiguar, **factorizando** previamente numerador y denominador, si es posible simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-1}{x+1}\right)$

b) $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-1}{x+1}\right)$

c) $\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$ $(Soluc:\ irreducible)$

d) $\frac{2x^2-3x+1}{2x^2-x-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x-1}{2x+1}\right)$

e) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{x^3-2x^2-x+2}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-3}{x+1}\right)$

f) $\frac{x^2+x+2}{x^2-x+1}$ $(Soluc:\ irreducible)$

g) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-4x^2+x+6}$ $\left(Soluc:\ \frac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}\right)$

h) $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$ $(Soluc:\ x-1)$

i) $\frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x-1}{2x+1}\right)$

j) $\frac{x^3-x^2-10x-8}{x^2+3x-4}$ $(Soluc:\ irreducible)$

k) $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x^3+4x^2+x-6}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-3}{x+3}\right)$

l) $\frac{4x^3+7x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+1}$ $\left(Soluc:\ \frac{4x-1}{x+1}\right)$

m) $\frac{2x^3-x^2-8x+4}{x^3+8}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x^2-5x+2}{x^2-2x+4}\right)$

n) $\frac{4x^3-2x^2-4x+2}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x+2}{x-1}\right)$

o) $\frac{2x^3-x^2-2x+1}{2x^3-5x^2+4x-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{x+1}{x-1}\right)$

p) $\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-3x^2+4x-12}$ $\left(Soluc:\ \frac{x^2-1}{x^2+4}\right)$

q) $\frac{x^2+x+1}{x^3-1}$ $\left(Soluc:\ \frac{1}{x-1}\right)$

r) $\frac{4x^3-8x^2-x+2}{2x^3-x^2-8x+4}$ $\left(Soluc:\ \frac{2x+1}{x+2}\right)$

s) $\frac{x^2-4}{x^3-7x-6}$ $\left(Soluc:\ \frac{x-2}{x^2-2x-3}\right)$

7. Efectuar las siguientes sumas y restas reduciendo previamente a común denominador y dando el <u>resultado simplificado</u> (NOTA: Con un * se indican aquellos casos en los que, al final del proceso de sumas y restas de F.A., se obtiene una expresión que se puede simplificar):

a) $\frac{3}{2x+4}+\frac{2x}{x^2-4}$ $\left(Soluc:\ \frac{7x-6}{2x^2-8}\right)$

b) $\frac{x^2-1}{x^3}-\frac{2x}{x^2+7}$ $\left(Soluc:\ \frac{-x^4+6x^2-7}{x^5+7x^3}\right)$

c) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-x-2}$ $\left(Soluc: \frac{x^2-x-1}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

d) $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}$ $\left(Soluc: \frac{2x^2+8}{x^2-4}\right)$

e) $\frac{2x}{x^2-4}+\frac{x+1}{4x-8}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+11x+2}{4x^2-16}\right)$

f) $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}$ $\left(Soluc: \frac{4x}{x^2-1}\right)$

*** g)** $\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{2}{x+1}\right)$

h) $1-\frac{x}{y}$ $\left(Soluc: \frac{y-x}{y}\right)$

i) $x-\frac{x^2-1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x}\right)$

j) $\frac{3x-2}{x^2-1}+\frac{x+2}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+6x}{x^2-1}\right)$

k) $\frac{7x}{6x+12}-\frac{x+5}{2x^2-8}$ $\left(Soluc: \frac{7x^2-17x-15}{6x^2-24}\right)$

l) $\frac{x+3}{x^2+1}+\frac{2x}{x-3}$ $\left(Soluc: \frac{2x^3+x^2+2x-9}{x^3-3x^2+x-3}\right)$

m) $\frac{3x}{x^2-1}-\frac{x+2}{x+1}$ $\left(Soluc: \frac{-x^2+2x+2}{x^2-1}\right)$

n) $\frac{3}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{x+1}{x^2-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+x+2}{x^2-1}\right)$

o) $\frac{x+2y}{x^2-y^2}+\frac{2x-5y}{x-y}$ $\left(Soluc: \frac{2x^2-5y^2-3xy+x+2y}{x^2-y^2}\right)$

p) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}$ $\left(Soluc: \frac{x-z}{xz}\right)$

q) $x+\frac{1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+1}{x}\right)$

r) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$ $\left(Soluc: \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)$

*** s)** $\frac{1}{x-2}-\frac{x^2+4x+8}{(x+2)^2(x-2)}+\frac{1}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x^2+4x+4}\right)$

*** t)** $\frac{x-2}{x+2}-\frac{1}{x-2}+\frac{6x-x^2}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x-2}\right)$

*** u)** $\frac{1}{x-1}-\frac{3x+3}{x^2+x-2}+\frac{1}{x+2}$ $\left(Soluc: \frac{1}{1-x}\right)$

v) $\frac{x-1}{x^2-4}-\frac{x-2}{x^2+2x}+\frac{1}{x-2}$ $\left(Soluc: \frac{x^2+5x-4}{x^3-4x}\right)$

*** w)** $\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}-\frac{12}{x^2-4}$ $\left(Soluc: \frac{2x+3}{x+2}\right)$

x) $\frac{x-2}{x^2+x-2}-\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{x+3}{x^2-3x+2}$ $\left(Sol: \frac{x^2+x+11}{x^3-x^2-4x+4}\right)$

y) $\frac{x^2-x+9}{x^3-9x}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x}$ $\left(Soluc: \frac{1}{x+3}\right)$

z) $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x+1}{x-1}-\frac{1-x}{x^2-1}$ $\left(Soluc: \frac{5x^2+7x}{x^2-1}\right)$

α) $\frac{4}{x+1}+\frac{x}{x^2+1}+\frac{x+1}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^4+7x^3-2x^2+5x-3}{x^4-1}\right)$

β) $\frac{3}{2x-4}+\frac{1}{x+2}-\frac{x+10}{2x^2-8}$ $\left(Soluc: \frac{2}{x+2}\right)$

*** γ)** $\frac{x-x^2}{1-x^2}+\frac{1+x}{x^2+2x+1}-\frac{1-2x}{1+x}$ $\left(Soluc: \frac{3x}{x+1}\right)$

δ) $\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x+1}{x^2-1}+\frac{x}{(x+1)^2}$ $\left(Soluc: \frac{3x^3+3x^2+3x+1}{x^4+x^3-x^2-x}\right)$

ε) $\frac{1}{x^2-9x+20}-\frac{1}{x^2-11x+30}+\frac{1}{x^2-10x+24}$ $\left(Soluc: \frac{x-7}{x^3-15x^2+24x-120}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 44: 58 a 61***

8. Efectuar los siguientes productos y cocientes, dando el <u>resultado simplificado</u>:

a) $\frac{3x-1}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{2x}$ $\left(Soluc: \frac{3x-1}{2x^2-6x}\right)$

b) $\frac{x+1}{x^2-2}:\frac{x^2+2}{x-1}$ $\left(Soluc: \frac{x^2-1}{x^4-4}\right)$

c) $\dfrac{\frac{x+1}{x+2}}{\frac{x+1}{x+3}}=$ $\left(Soluc: \frac{x+3}{x+2}\right)$

d) $\dfrac{\frac{3x+1}{x^2-4}}{\frac{x}{x^2-4x+4}}=$ $\left(Soluc: \frac{3x^2-5x-2}{x^2+2x}\right)$

e) $\frac{3x-1}{x^2}\cdot\frac{x+1}{x^5}$ $\left(Soluc: \frac{3x^2+2x-1}{x^7}\right)$

f) $\dfrac{\frac{x+1}{x^2-2}}{\frac{x-1}{x^2+2}}=$ $\left(Soluc: \frac{x^3+x^2+2x+2}{x^3-x^2-2x+2}\right)$

g) $\dfrac{\frac{x-1}{x^2-1}}{\frac{x+1}{x^2+2x+1}}=$ $(Soluc: 1)$

h) $\dfrac{\frac{x^3-3ax^2+3a^2x-a^3}{x+a}}{\frac{x-a}{x+a}}=$ $(Soluc: x^2-2ax+a^2)$

i) $\dfrac{9\,\frac{x+2y}{3}+6z}{3}=$ $(Soluc: x+2y+2z)$

j) $\dfrac{\frac{x}{3}}{x-\frac{x}{3}}=$ $(Soluc: 1/2)$

k) $\frac{A}{B}(1-B)+A=$ $\left(Soluc:\ A/B\right)$

l) $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x+1}{5x}\right)$

m) $\dfrac{\dfrac{\frac{2}{a}-1}{\frac{2}{a}}}{-\dfrac{1}{2}}=$ $\left(Soluc:\ a-2\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 44: 62, 64 y 65***

9. Efectuar las siguientes operaciones combinadas con F.A. y simplificar:

a) $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{2x}{x^2-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{1}{x}\right)$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-2}\,\dfrac{x-1}{x+1}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

c) $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\dfrac{a+b}{ab}=$ $\left(Soluc:\ -\dfrac{2}{a-b}\right)$

d) $\dfrac{xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x-y}=$ $\left(Soluc:\ \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)$

☞ *Ejercicios libro:* ***pág. 39: 22; pág. 44: 63, 66 y 67***

10. Demostrar que: **a)** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$ **b)** $\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$